**7.Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.**

**Теорема:**

Знакочередующийся ряд

 S = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n b_n

сходится, если выполняются оба условия:

1. 0< b_{n+1}\leq b_n \,\, для всех n\ge 0 
2. \lim_{n \to \infty} b_n  = 0.

**Доказательство:**

Рассмотрим две последовательности частичных сумм ряда R_n=b_0-b_1+\ldots+b_{2n}  и L_n=b_0-b_1+\ldots-b_{2n-1} .

Первая последовательность невозрастает: R_{n}-R_{n+1}=b_{2n+1}-b_{2n+2}\ge 0  по первому условию.

По тому же условию вторая последовательность неубывает: L_{n}-L_{n+1}=b_{2n+1}-b_{2n}\le 0 .

Первая последовательность мажорирует вторую, а именно, для любых m,n\in\mathbb{N} имеет место неравенство

R_n-L_{m}\ge\left\{\begin{array}{ll}
R_m-L_m=b_{2m}>0,&m\ge n\\
R_n-L_n=b_{2n}>0,&m\le n\end{array}\right.\quad,

поэтому они обе сходятся как монотонные ограниченные последовательности.

Осталось заметить, что \lim_{m,n}|R_n-L_{m}|=0, поэтому они сходятся к общему пределу  S, который и является суммой исходного ряда.

Попутно мы показали, что для любой частичной суммы ряда S_n имеет место оценка |S-S_n|<b_{n+1}.